CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR ANNÉE 1988

EPREUVE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES *(Durée : 1 h 30 - Coefficient : 3)*

Il sera tenu le plus grand compte du soin apporté à la présentation et à la rédaction des démonstrations. Les candidats pourront traiter une question en admettant les résultats des questions précédentes. Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes les unes des autres.

Le problème a pour objet de décrire quelques méthodes permettant de calculer π .

1 - On rappelle que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux et périodique de période 2π, alors :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

où, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, e^{-inx} \, dx$ désigne le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de f.

a) Calculer le développement en série de Fourier de la fonction définie sur $]-\pi, \pi[$ par $f(x) = x$. En déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

b) Montrer que $\forall n_0 \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{n=1+n_0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) \leqslant \frac{1}{n_0}$

En déduire que :

$$\left| \sqrt{6 \sum_{n=1}^{n_0} \left(\frac{1}{n^2}\right)} - \pi \right| \leqslant \frac{2}{n_0}$$

2 - On rappelle que $2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, du = \sqrt{\pi}$

a) Montrer que $\forall x_0 \geqslant 1$, $\left| 2 \int_0^{x_0} e^{-u^2} \, du - \sqrt{\pi} \right| \leqslant e^{-x_0^2}$

b) Montrer que $\forall x_0 \geqslant 1$, $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_0^{x_0} e^{-u^2} \, du - \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x_0^{2n+1}}{n!(2n+1)} \right| \leqslant \frac{x_0^{2N+3}}{(N+1)!}$$

On pourra au préalable prouver que $\forall y \in [0, x_0^2]$ on a :

$$\left| e^{-y} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-y)^n}{n!} \right| \leqslant \frac{x_0^{2N+2}}{(N+1)!}$$

c) Déduire de ce qui précède que $\forall x_0 \geqslant 1$, $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\left| \pi - \left[2 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x_0^{2n+1}}{n!(2n+1)} \right]^2 \right| \leqslant g(x_0) \text{ avec}$$

$$g(x_0) = 4 \left(\frac{x_0^{2N+3}}{(N+1)!} + e^{-x_0^2} \right) \left(\sqrt{\pi} + e^{-x_0^2} + \frac{x_0^{2N+3}}{(N+1)!} \right)$$

3 - a) Etablir la convergence pour tout réel $x \geqslant 0$ de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, e^{-xt} \, dt = f(x)$$

b) Soit $x_0 > 0$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et tout $h \in \left] \frac{-x_0}{4} , \frac{x_0}{4} \right[$ on a :

$$\left| e^{-(x_0+h)t} - e^{-x_0 t} + ht \, e^{-x_0 t} \right| \leqslant \frac{h^2 t^2}{2} \exp\left(\frac{-3x_0}{4} t\right)$$

c) En déduire que f est dérivable en tout $x_0 > 0$, de dérivée

$$f'(x_0) = - \int_0^{+\infty} e^{-tx_0} \sin t \, dt$$

d) Calculer pour tout $x_0 > 0$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-tx_0} \sin t \, dt$

e) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ existe et déterminer sa valeur. En admettant que f est continue à droite en 0, calculer f(0)

f) Montrer que $\forall x_0 > 0$, on a :

$$\left| 2 \int_0^{x_0} \frac{\sin t}{t} \, dt - \pi \right| \leqslant \frac{4}{x_0}$$

—==oOOo==—

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail